

Лекция 3

Аукцион с постоянным спросом
без ограничений на передачу

Слабая двойственность

Рассмотрим задачу (1). Введем двойственную функцию

$$d(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$$

Утв. $\forall \lambda \geq 0 \quad \forall x \in X \quad d(\lambda) \leq f(x)$

Д-во: $d(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda^T g(x) \leq$
 $\leq f(x^*) + \lambda^T g(x^*) \leq f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

Таким образом $\max_{\lambda \geq 0} d(\lambda) \leq \min_{x \in X} f(x)$

Свойства двойственной функции

1) $d(\lambda)$ - вогнутая

2) $\nabla d(\lambda) = g(x(\lambda))$, где

$$x(\lambda) = \underset{x}{\operatorname{argmin}} L(x, \lambda)$$

$$\text{Д.во: } L(x(\lambda)) \equiv f(x(\lambda)) + \lambda^T g(x(\lambda)) \equiv$$

$$\equiv \min_x L(x, \lambda)$$

$$\nabla_{\lambda} d(\lambda) = \nabla_{\lambda} L(x(\lambda)) = \nabla_x f(x(\lambda)) \frac{dx}{d\lambda}$$

$$+ \lambda^T \nabla_x g(x(\lambda)) \frac{dx}{d\lambda} + g(x(\lambda)) =$$

$$= (\nabla_x f(x) + \lambda^T \nabla g(x(\lambda))) \frac{dx}{d\lambda} + g(x(\lambda)) = g(x(\lambda))$$

Пример 3 Отсутствие седловой точки – экономическая интерпретация

x – объем выпуска, $1 - x^2$ – себестоимость выпуска
 $x \in [0, 1]$ – производственные мощности

Задача планирования оптимального выпуска
при данном спросе

$$\begin{aligned} \min_{x \in [0, 1]} 1 - x^2 \\ 1/2 - x = 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{оптимальное решение } x^* = 1/2$$
$$f(x^*) = 1 - x^{*2} = 3/4$$

Поставим задачу поиска седловой точки:

$$L(x, \lambda) = 1 - x^2 + \lambda(1/2 - x)$$
$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \min_{x \in [0, 1]} L(x, \lambda) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \left\{ \min_{x \in [0, 1]} L(x, \lambda) \right\} =$$

$$= \max_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2} \right\} = 1/2, \lambda^* = -1$$

Таким образом, $\max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda) \neq f(x^*) \Rightarrow$
 седловой точки нет!

$$\min_{x \in [0, 1]} L(x, \lambda) = \min_{x \in [0, 1]} 1 - x^2 + \lambda (1/2 - x) \Leftrightarrow$$

$$\max_{x \in [0, 1]} \lambda \cdot x - (1 - x^2) - \text{задача максимизации}$$

При равновесной цене $\lambda^* = -1$

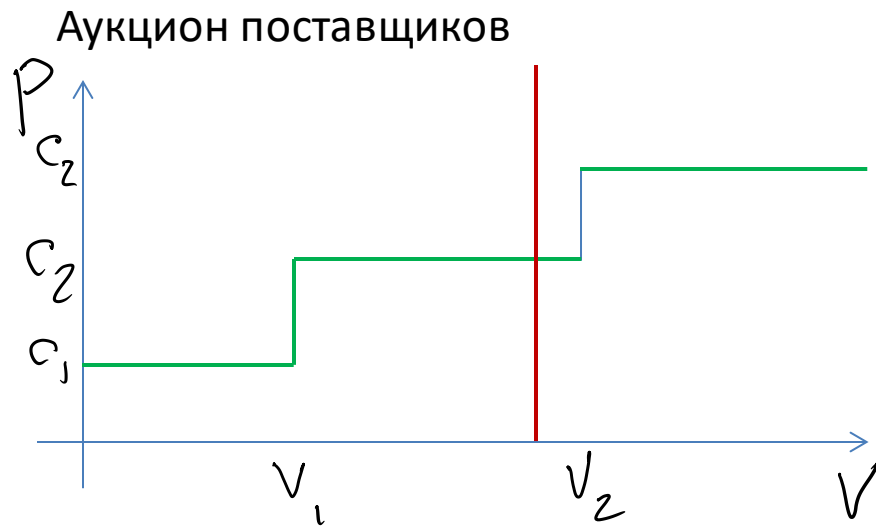
$$\max_{x \in [0, 1]} -x - (1 - x^2)$$

$$\Downarrow \\ x_{\text{нр}} \in \{0, 1\}$$

прибыли
 игроком при
 заданной
 цене λ

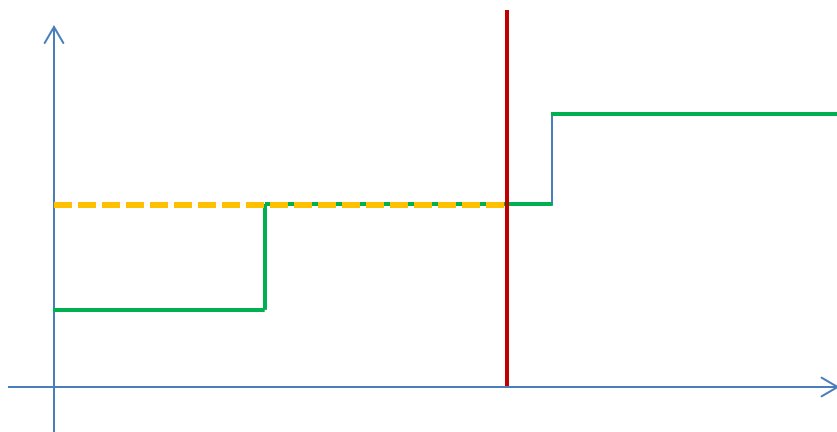
Вывод: отсутствие седловой точки с экономической точки зрения может интерпретироваться как несовпадение индивидуально рациональной стратегии игрока (стратегии, которая максимизирует его прибыль) и глобально оптимальной стратегии планирования производства.

Модель аукциона рынка одного товара

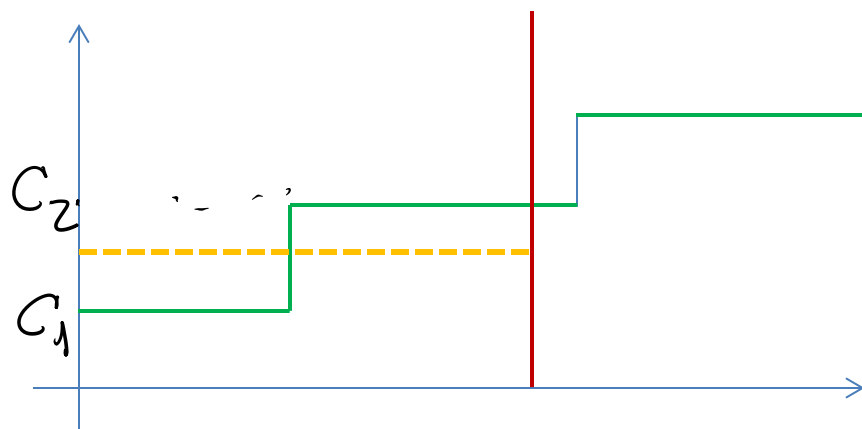


Модели ценообразования

1) По «маржинальной» (предельной) цене



2) По заявке



Стратегия подачи заявки участником при разных моделях ценообразования

- При маржинальном ц/о: доминирующая стратегия подачи заявки по себестоимости
- При ц/о по заявке: участнику выгодно «угадывать» себестоимость «последнего» принятого поставщика

Математическая модель аукциона поставщиков

$c_i, i=1, \dots, n$: себестоимость производства
единицы товара i -м поставщиком

$\bar{x}_i, i=1, \dots, n$: максимальный объем
пр-ва i -го поставщика

D - спрос

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [0, \bar{x}_i]}$$

$$D - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

Интерпретация множителя Лагранжа к балансу спроса и предложения как равновесной цены

- Множитель Лагранжа – производная оптимального значения целевой функции по правой части ограничения (величине спроса)
- Множитель Лагранжа показывает оптимальный прирост себестоимости производства при малом приросте спроса, иными словами – это наименьшая возможная «цена» покрытия прироста спроса
- Понятие «маржинальной» (предельной) цены связано с покрытием маржинального прироста спроса

Вычисление равновесной цены

$$\max_{\lambda} d(\lambda) = \max_{\lambda} \min_{x_i \in [0, \bar{x}_i]} \sum_i c_i x_i + \lambda (D - \sum x_i)$$

$$= \max_{\lambda} \min_{x_i \in [0, \bar{x}_i]} \sum_i (c_i - \lambda) x_i + \lambda D =$$

$$= \max_{\lambda} \left[\sum_i \min_{x_i \in [0, \bar{x}_i]} (c_i - \lambda) x_i \right] + \lambda D$$

$$= \max_{\lambda} \left[\sum_i \min((c_i - \lambda) \bar{x}_i, 0) \right] + \lambda D =$$

$$= \max_{\lambda} \left[\sum_i \begin{cases} (c_i - \lambda) \bar{x}_i, & c_i < \lambda \\ 0, & c_i \geq \lambda \end{cases} \right] + \lambda D$$

Πύσβ $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$, $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i > D$

Βοδερει ηρουζβ.κ :

$$d(\lambda) = \sum_{i \leq k} (c_i - \lambda) \bar{x}_i + \lambda D, \quad \lambda \rightarrow c_k^+$$

$$d(\lambda) = \sum_{i < k} (c_i - \lambda) \bar{x}_i + \lambda D, \quad \lambda \rightarrow c_k^-$$

$$d'(\lambda) \Big|_{\lambda=c_k^+} = -\sum_{i \leq k} \bar{x}_i + D \quad (A)$$

$$d'(\lambda) \Big|_{\lambda=c_k^-} = -\sum_{i < k} \bar{x}_i + D \quad (B)$$

$\Downarrow$

$$d'(\lambda) \Big|_{\lambda=c_k^+} \leq d'(\lambda) \Big|_{\lambda=c_k^-}$$

Воспользуемся к такому образом, что

$$d'(\lambda) \Big|_{\lambda=c_k^+} < 0 \text{ и } d'(\lambda) \Big|_{\lambda=c_k^-} > 0 \Rightarrow$$

$d(\lambda)|_{\lambda=C_k}$ - непрерывно и $0 \in \partial d(\lambda)|_{\lambda=C_k}$

т.е. $\max_{\lambda} d(\lambda)$ достигается в т.

$$\lambda = C_k$$

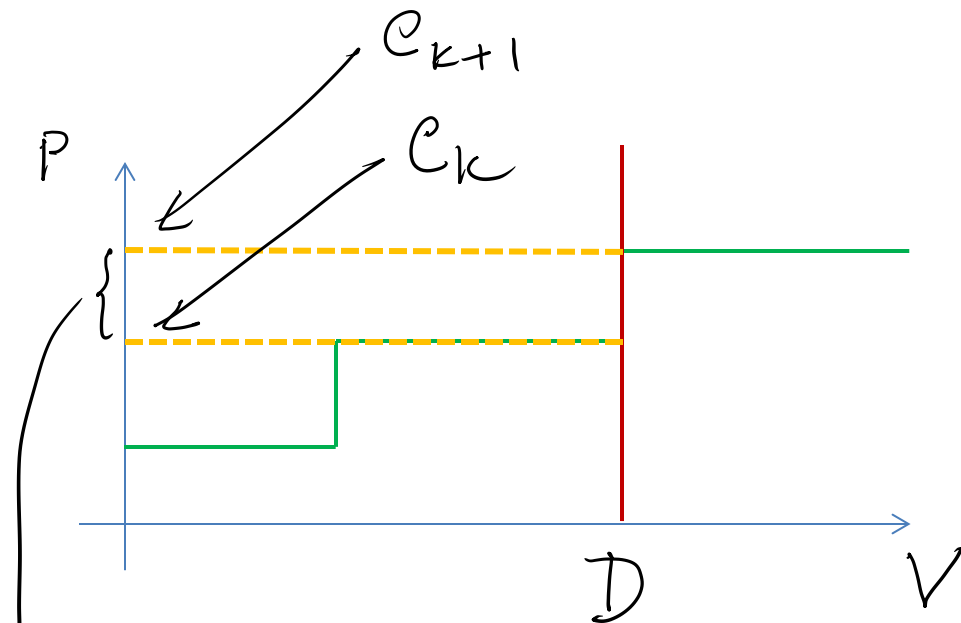
$$U_3(A), (B) \Rightarrow \exists x_k \in [0, \bar{x}_k]:$$

$$\sum_{i < k} \bar{x}_i + x_k = D$$

т.е. $\max_{\lambda} d(\lambda)$ достигается при таком λ , что обеспечен баланс спроса и предложения

Случай неединственности цены:

$$\exists k: \sum_{i=1}^k \bar{x}_i = D$$



интервал
равновесных цен

$$d'(\lambda) \Big|_{\lambda \in (c_k, c_{k+1})} = -\sum_{i \leq k} \bar{x}_i + D = 0 \Rightarrow$$

$\max d(\lambda)$ достигается $\forall \lambda \in (c_k, c_{k+1})$

Индивидуальная рациональность стратегий поставщиков

Пусть λ^* - опт. мн-ль Лагр. Из усл. и ККТ:

$$c_i - \lambda^* + \pi_i^+ - \pi_i^- = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

($\pi_i^{\pm}$ - множители Лагранжа к
ограничениям $0 \leq x_i \leq \bar{x}_i$)

$$c_i - \lambda^* < 0 \Rightarrow \pi_i^+ > 0, \pi_i^- = 0 \Rightarrow$$

$$x_i^* = \bar{x}_i \text{ (из условия доп. нежест.)}$$

$$c_i - \lambda^* > 0 \Rightarrow \pi_i^+ = 0, \pi_i^- > 0 \Rightarrow$$
$$x_i^* = 0$$

$$c_i = \lambda^* \Rightarrow \pi_i^{+/-} = 0, x_i^* \in [0, \bar{x}_i]$$

Т.о. если заявка (себестоимость)

ниже равновесной цены λ^* , то

$x_i^* = \bar{x}_i$ и $0 < \pi_i^+ = \lambda^* - c_i$ - прибыль

из поставщика в расчете на

единицу продукции

Если c_i больше λ^* , то $x_i^* = 0$ и

$0 < \pi_i^- = c_i - \lambda^*$ - убыток из поставщика на единицу продукции

Если $c_i = \lambda^*$, поставщик не имеет
прибыли/убытка $\forall x_i \in [0, \bar{x}_i]$
("маргинальный", "замораживающий",
"ценообразующий" поставщик)
Стратегия x^* , удовл. усл. ККТ,
является индивидуально-
рациональной для всех
поставщиков.

Пример

Спрос = 600 МВтч

	Г1	Г2	Г3	Г4
Себестоимость, руб/МВтч	200	500	700	1200
Макс. производство, МВтч	100	300	300	200

Рассчитать равновесную цену, оптимальные стратегии и прибыли поставщиков.

